Ricordiamo che $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha \cdot (e_\alpha, e_\alpha)$

Questa vale in generale, quindi anche per le radici semplici

$$e_i := e_{\alpha_i} \quad \forall \ \alpha_i \in \Pi^+_\sigma$$

$$\left[e_i, c_{\alpha_i} e_{-\alpha_i}\right] = c_{\alpha_i}(e_\alpha, e_{-\alpha}) \cdot h_\alpha$$

ora se $c_{\alpha_i} = \dfrac{1}{(e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i})}$ avrei

$$f_i := \frac{e_{-\alpha_i}}{(e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i})}$$

$$[e_i, f_j] = h_{\alpha_i} \delta_{ij}$$

sto usando il risultato di ieri che $\sigma_1 - \sigma_2$ non è una radice se σ_1 e σ_2 sono semplici

$$[h_{\alpha_i}, e_j] =$$

$$= [h_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}] = \alpha_j(h_{\alpha_i})\, e_{\alpha_i} = (h_{\alpha_j}, h_{\alpha_i})\, e_{\alpha_i}$$

$$= \langle \alpha_j \, \alpha_i \rangle \, e_{\alpha_i}$$

$$[h_{\alpha_i}, f_j] =$$

$$= \frac{[h_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}]}{(e_{\alpha_j}, e_{-\alpha_j})} = - \frac{\alpha_j(h_{\alpha_i})\, e_{-\alpha_j}}{(e_{\alpha_j}, e_{-\alpha_j})} = - \frac{(h_{\alpha_j}, h_{\alpha_i})\, e_{-\alpha_j}}{(e_{\alpha_j}\, e_{-\alpha_j})}$$

$$= - \langle \alpha_j\, \alpha_i \rangle \underbrace{\frac{e_{-\alpha_j}}{(e_{\alpha_j}\, e_{-\alpha_j})}}_{f_j} = -\langle \alpha_j \alpha_i \rangle f_j$$

Gli elementi $\langle \alpha_i \alpha_j \rangle$ sono quelli che controllano i commutatori $[h_\beta, e_{\pm\alpha}]$. Abbiamo trovato quindi:

(he) $$\overbrace{\frac{1}{\langle \alpha_i \alpha_i \rangle} 2\, [h_{\alpha_i}}^{\hat h_j}, e_j] = \langle \alpha_i\, \alpha_j \rangle e_j \cdot 2 \, \frac{1}{\langle \alpha_i \alpha_i \rangle}$$

(hf) $$\overbrace{\frac{1}{\langle \alpha_i \alpha_i \rangle} 2\, [h_{\alpha_i}}^{\hat h_j}, \hat f_j] = -\langle \alpha_i\, \alpha_j \rangle \hat f_j \cdot 2 \, \frac{1}{\langle \alpha_i \alpha_i \rangle}$$

(ef) $$\underbrace{\frac{1}{\langle \alpha_j \alpha_j \rangle} 2\, [e_i, f_j}_{\hat f_j}] = \delta_{ij} \underbrace{h_{\alpha_j} \cdot 2 \, \frac{1}{\langle \alpha_j \alpha_j \rangle}}_{\hat h_j}$$

L'eq. (hf) è inalterata se

$$f \to \hat{f} = c_f\, f$$

L'eq. (ef) resta invariata se riassorbo c_f nella def. di h

$$h \to c_f\, h$$

E il fattore c_f a questo punto rispunta nell'eq. (he)

Con $c_{f_i} = \frac{2}{\langle \alpha_j \alpha_j \rangle}$ posso fare comparire nei commutatori gli $(m-p)$, che alla fine sono la dimensionalità della sequenza di passi

$$[e_i, \hat{f}_j] = \hat{h}_j\, \delta_{ij}$$

$$[h_i, e_i] = A_{ij}\, e_j \qquad A_{ij} = 2\frac{\langle \alpha_i\, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j \alpha_j \rangle}$$

$$[\hat{h}_i, \hat{f}_j] = -A_{ij}\, \hat{f}_j$$

Si noti che $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_j$ perché $\alpha_i - \alpha_j$ non è una radice quando α_i e α_j sono semplici.

Per generare il resto dell'algebra poi uso $[e_i, e_j] = e_{i+j}$ nelle combinazioni che danno radici ammissibili.

$$A_{ij} = 2\frac{\langle \alpha_i \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j \alpha_j \rangle}$$

è detta matrice di Cartan

- (n-righe) $\times$ (n-colonne) se ci sono n radici semplici
- $A_{ij} \neq A_{ji}$
- $A_{ij} = 0 \iff A_{ji} = 0$
- $A_{ij} \leq 0$ perché $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle < 0$
- $A_{ij} = \{0, -1, -2, -3\}$ perché nell'aggiunta non ci possono stare più

di 4 pesi in fila

- $\langle \alpha_i \alpha_j \rangle^2 \leq \langle \alpha_i \alpha_i \rangle \langle \alpha_j \alpha_j \rangle$ (perché è un prodotto scalare)

l'uguaglianza può essere ottenuta solo se $\alpha_i = \alpha_j$

$$\Rightarrow A_{ij} A_{ji} < 4 \overset{\text{segue}}{\Rightarrow} \begin{cases} A_{ij} = -3 \overset{\text{implica}}{\Rightarrow} A_{ji} = -1 \\ A_{ij} = -2 \overset{\text{implica}}{\Rightarrow} A_{ji} = -1 \end{cases}$$

METODO
PER TROVARE TUTTE LE RADICI A PARTIRE DA QUELLE SEMPLICI

Se prendo una radice decomposta sulla base Π_σ^+

$$\beta = \sum_j k_j \sigma_j$$

dal risultato sui pesi

$$(m-p)_{\sigma_i} = \frac{2\langle \beta\, \sigma_i \rangle}{\langle \sigma_i\, \sigma_i \rangle} = \sum_j 2k_j \frac{\langle \sigma_j\, \sigma_i \rangle}{\langle \sigma_i\, \sigma_i \rangle}$$

$$= \sum_j k_j A_{ji}$$

dunque $\beta + \sigma_i$ è una radice accettabile se

$$0 < (p)_{\sigma_i} = m_{\sigma_i} - \underbrace{\sum_j k_j A_{ji}}$$

somma degli elementi della colonna i per tutte le funzioni che ho usato (moltiplicate la loro molteplicità di utilizzo)

p è dato da m − la somma degli elementi delle colonne di A

Mat Cartan di $SU(2)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$2 \quad -1 \quad \alpha_1$ $\qquad\qquad$ $-1 \quad 2 \quad \alpha_2$

$\alpha_1 \to \alpha_1 + \alpha_2$ $\qquad$ $\alpha_1 + \alpha_2$

$p_2 = m_2 - A_{12} = -A_{12} = 1$ $\qquad\qquad$ $p_1 = \underset{0}{m_1} - A_{21} = +1$

$\downarrow$

$\alpha_1 + \alpha_2$

$p_2 = \underset{1}{m_2} - \overset{\text{somma colonna 2}}{1} = 0$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} \underset{\text{somma colonna 1}}{1} & \underset{\text{somma colonna 2}}{1} \end{pmatrix}$ $\qquad$ $p_1 = \underset{1}{m_1} - \overset{\text{somma colonna 1}}{1} = 0$

$e_{\alpha_1+\alpha_2}$ lo ottengo da $[e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}] = e_{\alpha_1+e_{\alpha_2}}$

Md Carton di G_2

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = (2 \quad -3)$ $\qquad$ $\alpha_2 = (-1 \quad 2)$

$\alpha_1 + \alpha_2$

$p_1 = \underset{1}{m_1} - 1 = 0$ $\qquad (1 \quad -1)$ $\qquad p_2 = \underset{1}{m_2} + 1 = 2$

$\alpha_1 + 2\alpha_2$

$p_1 = \underset{0}{m_1} - 0 = 0$ $\qquad (0 \quad 1)$ $\qquad p_2 = \underset{2}{m_2} - 1 = 1$

perché $2\alpha_2$ non è una radice!

$\alpha_1 + 3\alpha_2$

$p_1 = \underset{0}{m_1} + 1 = 1$ $\qquad (-1 \quad 3)$ $\qquad p_2 = \underset{3}{m_2} - 3 = 0$

perché $3\alpha_2$ non è una radice

$2\alpha_1 + 3\alpha_2$

$p_1 = \underset{1}{m_1} - 1 = 0$ $\qquad (1 \quad 0)$ $\qquad p_2 = \underset{0}{m_2} + 0 = 0$

perché $2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1+\alpha_2)$ non è una radice

B_2

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

α_1 $\quad 2 \quad -2$ $\qquad\qquad\qquad$ $-1 \quad 2$ $\quad \alpha_2$

$\alpha_1 + \alpha_2$

$p_1 = \underset{\underset{1}{\uparrow}}{m_1} - 1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \underset{\underset{1}{\uparrow}}{m_2} - 0 = 1$

$\alpha_1 + 2\alpha_2$

$p_1 = 0 + 0 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_2 = 0$

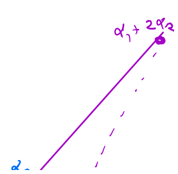
$A_{21} \Rightarrow 2\langle \alpha_2 \alpha_1 \rangle = -2 \langle \alpha_1 \alpha_1 \rangle$

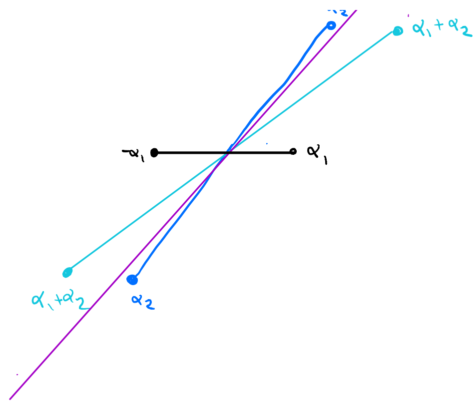
$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = - \langle \alpha_1 \alpha_1 \rangle$

$|\alpha_1| = \frac{|\alpha_2|}{2}$

$A_{12} \Rightarrow 2 \langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle = - \langle \alpha_2 \alpha_2 \rangle$

$$\frac{1}{2} = \frac{\langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle^2}{\langle \alpha_1 \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 \alpha_2 \rangle} = \frac{A_{12} A_{21}}{4}$$





$\alpha_1 + \alpha_2$
$-\alpha_1$
α_1
$\alpha_1 + \alpha_2$
α_2